



**Victor
Moreno Baessa**

**Modelação e Simulação Numérica de
Problemas Electrostáticos e Magnetostáticos
numa Superfície ou num Corpo**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM
MATEMÁTICA APLICADA À
ENGENHARIA**



**Victor
Moreno Baessa**

**Modelação e simulação numérica de problemas
electrostaticos e magnetostaticos numa superfície
ou num corpo**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro e Universidade de Cabo Verde para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática Aplicada à Engenharia**, realizada sob a orientação científica de Uwe Kähler, Professor Auxiliar com Agregação do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

O júri

Presidente: Dr. Domingos Moreira Cardoso

Vogais : Dr. Gastão Frederico - Arguente
Dr. Uwe Kahler - Orientador

Agradecimentos:

A todos que me acompanharam e me ajudaram neste mestrado, com destaque para a minha esposa e as minhas filhas, meus Professores da Universidade de Aveiro que se deslocaram à Cabo Verde no âmbito deste Mestrado, em especial ao meu Orientador Dr. UWE KAEHLER e ao Professor António Neves que muito contribuíram na sistematização e na organização deste documento.

Palavras-chave

Equação de Maxwell, Modelação e Simulação Numérica, Electrostática, Magnetostática, Método dos Elementos Finitos, Elementos de Lagrange - Linear.

Resumo

Este trabalho consiste na modelação de Campos Electromagnéticos via Equações de Maxwell e subsequente simulação numérica de uma carga electrostática numa superfície ou num corpo.

Nas últimas décadas, várias técnicas numéricas avançadas tem sido aplicadas para modelagem de campos electromagnéticos, permitindo análise precisa de complexos fenómenos descritos pelas equações de Maxwell. Dentre as principais técnicas actualmente empregadas, destaca-se o Método dos Elementos Finitos. Na abordagem por elementos finitos (elementos de Lagrange-Linear), os campos electromagnéticos (ou seus potenciais) são decompostos com relação a algumas funções de interpolação básicas, sendo os coeficientes de tal decomposição representados em um vector incógnita, a se determinar a partir da solução de um sistema esparso e simétrico de equações lineares. O principal atractivo do método está no facto deste possuir grande flexibilidade para representação de geometrias complexas, bem como grande maleabilidade para o tratamento de complexos fenómenos físicos.

Neste trabalho discute a aplicação do Método dos Elementos Finitos para análise de campos electromagnéticos. Análises permanentes são aqui consideradas, sendo problemas de electrostática, magnetostática e de propagação de ondas electromagnéticas focados.

Ao final do trabalho, resultados numéricos são apresentados, ilustrando as potencialidades das técnicas discutidas.

Keywords

Maxwell equations, Modelation and Numerical Simulation, Electrostatics, Magnetostatics, Finite Element Methods, Linear Lagrang Elements.

Abstract

This work consists in the modelation of electrostatic fields by Maxwell equations and subsequent numerical simulation of electrostatic charges on a surface or body.

In the last decades various advances in numerical techniques have been applied to the modelation of electromagnetic fields allowing the precise analysis of complex phenomena described by Maxwell equations. One of the principal techniques actually being in use is the finite element method. In the approach by finite elements the electromagnetic fields (or its potentials) are decompose by means of basic interpolation functions. The coefficients of such decomposition are represented by an unknown vector which will be determined by a solution of a sparse and symmetric system of linear equations. The principal advantage of this method resides in the fact that it possesses great flexibility for the representation of complex geometries as well as great flexibility for the treatment of complex phenomena.

Here we will discuss the application of finite element methods to the analysis of electromagnetic fields; in particular we study problems of electrostatics and magnetostatics. In the end of the work we present numerical results which illustrate the potential of the discussed techniques.

Conteúdo:

INTRODUÇÃO	3
CAPITULO 1:FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL:	5
1.1- Princípios básicos das equações de Maxwell	6
1.2- Leis Fundamentais do electromagnetismo	6
1.2.1- Lei de Coulomb e Intensidade do Campo Eléctrico	6
1.2.2- Densidade de Fluxo Eléctrico e Lei de Gauss	8
1.2.3 - Campo Magnético, Lei de Biot-Savart e Densidade de Fluxo Magnético	10
1.2.4- Lei de Faraday.....	11
1.2.5- Lei de Ampere - Maxwell	12
1.2.6- Sumário das Equações de Maxwell	13
1.3- Funções potencial como auxiliares do cálculo numérico	16
1.3.1- Função potencial magnético	16
1.3.2- Função potencial eléctrico	17
CAPITULO 2:FORMULAÇÃO VARIACIONAL DE PROBLEMAS ELECTROMAGNÉTICOS.....	19
2.1 – Método dos Elementos Finitos	20
2.1.1- Electrostática.....	20
2.1.2- Formulação Fraca pelo Método dos Elementos Finitos.....	21
2.1.3- Problema de Dirichlet e Formulação como problema de ponto de sela Erro! Marcador não definido.	
2.2- Magnetostática.....	26
2.2.1- Formulação Fraca para materiais com interface	28
CAPITULO 3: SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	31
3.1 - Electrostática:	31

3.1.1- Modelo bidimensional.	31
3.1.2- Modelo tridimensional:	35
3.2- Magnetostática.....	37
3.2.1- Modelo bidimensional	38
CONCLUSÃO	40
BIBLIOGRAFIA:	41

INTRODUÇÃO:

A importância e as enormes vantagens do uso de métodos de simulação numérica na procura de soluções para problemas complexos de electromagnetismo são inquestionáveis nos dias de hoje, pelos resultados altamente fiáveis obtidos nas mais variadas simulações numéricas efectuadas, utilizando Sistemas de Software apropriados. Como todas as pessoas podem ter acesso a computadores com alta capacidade de processamento (equivalentes à super computadores nos anos noventa), praticamente todas as áreas das ciências exactas tem feito uso, cada vez mais intensivo, dos métodos e técnicas computacionais para resolução de problemas para os quais as soluções analíticas são impraticáveis, e/ou imprecisas.

Com a evolução das tecnologias e, sendo o electromagnetismo um dos mais importantes fenómenos da natureza, e fundamental na engenharia e áreas afins, torna-se cada vez mais necessária a análise desses complexos fenómenos, usando as técnicas numéricas computacionais.

A teoria electromagnética explica os fenómenos ligados às cargas eléctricas nas suas formas estática e dinâmica, de onde derivam as leis fundamentais para a solução de inúmeros problemas da engenharia, como sejam a Lei de Ohm, a Lei de Kirchhoff, a Lei de Gauss, a Lei de Coulomb, a Lei de Faraday, a Lei de Ampere-Maxwell, etc..

As equações de Maxwell consolidaram, de forma definitiva, a união dos fenómenos eléctricos com os fenómenos magnéticos.

Neste trabalho, tratamos de problemas provocados pelos fenómenos eléctricos e magnéticos, na sua forma estática, conhecidos por electrostática e magnetostática.

O objectivo deste trabalho é efectuar a modelação e simulação numérica de problemas que envolvem a electrostática e a magnetostática numa superfície, ou num corpo. Para isso, recorreremos à modelação das equações de Maxwell, e sua escrita em termos das equações potências, efectuando de seguida as formulações fracas para os problemas de Dirichlet e de Neumann associados.

As complicações que surgem nos problemas de Dirichlet com valores de fronteiras não nulos, podem ser ultrapassados recorrendo a uma reformulação como problema de sela.

Na parte final deste trabalho mostraremos a aplicabilidade dos esquemas formulados efectuando simulações numéricas ilustrativas em 2D e em 3D.

Para as simulações numéricas adaptamos o Software ELMER que contém rotinas e aplicativos das mais diversas técnicas de análise numérica, incluindo o método dos elementos finitos, baseado em elementos de Lagrange do tipo linear utilizados neste trabalho.

CAPITULO 1: FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL:

As descobertas dos fenómenos eléctricos e magnéticos ocorreram praticamente na mesma época mas de forma isoladas, sem que se estabelecesse qualquer vínculo entre os dois fenómenos. Enquanto a electricidade teve o seu nascimento com Thales de Mileto, que descobriu que a fricção do âmbar com lã tornava este capaz de atrair corpos leves, o magnetismo foi descoberto por Magnes, que verificou que a magnetite, uma pedra preta, era capaz de atrair corpos de ferro.

A união destas duas ciências teve início com a descoberta de Oersted em 1820. A partir desta data cientistas como Ampere, Faraday, Biot, Savat e Lenz, realizaram importantes descobertas que consolidavam cada vez mais a união da Electricidade com o Magnetismo, até que, em 1865, apoiado nos trabalhos até então realizados, Maxwell publica sua Teoria Electromagnética.

Ampere, Faraday, Biot, Savat e muitos outros realizaram sucessivas experiências para confirmarem suas teorias, muitas vezes com sucessos.

Actualmente a nossa tecnologia está fundamentada em princípios do electromagnetismo tais como a Lei de Lenz, a Lei de Faraday, etc.. Muitos dos equipamentos eléctricos e electrónicos funcionam baseados nestes princípios.

Na metade da década de 1860, Maxwell apresentou um artigo que expressa em linguagem matemática as descobertas de C.A. de Coloumb, H. C. Oersted, M. Faraday, J. B. Biot, F. Savart, H. F. Lenz e J. Henry, consolidando assim a teoria do electromagnetismo.

As Equações de Maxwell, assim chamadas em honra de James Clerk Maxwell, são um grupo de quatro equações que descrevem o comportamento dos campos eléctrico e magnético, bem como as suas interacções com a matéria.

As equações de Maxwell expressam, respectivamente, como as cargas eléctricas produzem campos eléctricos (Lei de Gauss), como a corrente eléctrica produz um campo magnético (Lei de Ampere), e como variações do campo magnético produzem campos eléctricos (Lei da indução de Faraday). Maxwell, em 1864, foi o primeiro a colocar todas as quatro

equações juntas e perceber que era necessária uma correcção na lei de Ampere: alterações no campo eléctrico produzem campos magnéticos.

1.1- Princípios básicos das equações de Maxwell:

- A força entre cargas eléctricas pontuais é proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas;
- Não há monopólos magnéticos livres;
- Um campo eléctrico variável gera um campo magnético;
- Um campo magnético variável gera um campo eléctrico.

Seguidamente apresentamos um estudo mais detalhado dos princípios básicos das equações de Maxwell, evidenciando as leis fundamentais do electromagnetismo e a formulação matemática dessas equações.

1.2- Leis Fundamentais do electromagnetismo

1.2.1- Lei de Coulomb e Intensidade do Campo Eléctrico

a) Lei de Coulomb:

Coulomb estabeleceu que a força F entre dois objectos pequenos, separados no espaço livre, a uma distância grande comparada com os seus tamanhos, é directamente proporcional à carga de cada um e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles, ou seja:

$$|F| = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad (1.1)$$

onde Q_1 e Q_2 são quantidades positivas ou negativas de carga eléctrica, R é a distância entre os objectos e k é a constante de proporcionalidade dada por:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (1.2)$$

sendo ϵ_0 a permissividade do espaço livre, cuja magnitude é medida em *Farad/metro*. O vector \mathbf{F} tem direcção e sentido da carga menor para a carga maior.

b) Intensidade de Campo Eléctrico.

A força resultante da interacção entre uma carga pontual fixa e uma outra carga de teste, em movimento, definida por unidade de carga, resulta numa grandeza vectorial que é chamada campo eléctrico e, simbolicamente, representada por \mathbf{E} e cuja intensidade é:

$$|E| = \frac{|F|}{Q_2} = k \frac{Q_1}{R^2} \quad (1.3)$$

que, genericamente, pode ser expressa por:

$$|E| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_R \quad (1.4)$$

sendo \mathbf{a}_R o vector unitário na direcção estabelecida pelos dois objectos.

Numa distribuição volumétrica e contínua de carga, onde devemos somar as contribuições de todos os volumes de carga de uma dada região, o campo eléctrico é dado por:

$$\mathbf{E} = \sum_{m=1}^n \rho \frac{\Delta v}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (1.5)$$

Sendo ρ representa a densidade volumétrica de carga e que, matematicamente, é definida, usando um processo de limite, dado por:

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} \quad (1.6)$$

Na equação (1.5), fazendo o volume elementar Δv tender a zero ao mesmo tempo que o número n de elementos se torna infinito, a soma finita transforma-se numa integral(sob certas condições de continuidade) e, temos:

$$E = \int_V \frac{\rho a_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} dv \quad (1.7)$$

2.2.2- Densidade de Fluxo Eléctrico e Lei de Gauss

a) Densidade de Fluxo Eléctrico

A densidade de fluxo eléctrico D num ponto provocado por uma carga pontual é dado por:

$$D = \frac{Q}{4\pi R^2} a_R \quad (1.8)$$

Como o campo eléctrico E criado por uma carga pontual é dado pela Equação (1.4),

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_R \quad (1.9)$$

então, combinando as equações (1.8) e (1.9), chegaremos a uma expressão que relaciona as grandezas vectoriais E e D , no espaço livre, dada por:

$$D = \epsilon_0 E \quad (1.10)$$

b) Lei de Gauss:

O Teorema de Gauss estabelece que o fluxo eléctrico que atravessa uma superfície fechada suave é igual a componente da carga que actua na superfície, ou seja:

$$\oint_S D \cdot \vec{n} ds = Q \quad (1.11)$$

onde \vec{n} é o vector normal a superfície e $Q = \int_V \rho dv$, para uma distribuição volumétrica de cargas, sendo V é o volume do interior da superfície.

Então, para o caso electrostático, a lei de Gauss expressa em função da densidade volumétrica de carga, é dada por:

$$\epsilon_0 \oint_S E \cdot \vec{n} ds = \int_V \rho dv \quad (1.12)$$

Usando o teorema de Gauss, que correlaciona uma integral de superfície com uma integral de volume, temos que

$$\epsilon_0 \oint_S E \cdot \vec{n} ds = \epsilon_0 \int_V (\nabla \cdot E) dv \quad (1.13)$$

Comparando os dois membros das equações (1.12) e (1.13) encontramos a seguinte relação:

$$\epsilon_0 \int_V (\nabla \cdot E) dv = \int_V \rho dv \quad (1.14)$$

Como esta igualdade é verdadeira para qualquer volume, então o integrando da equação (1.14), satisfaz

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot D = \rho \quad (1.15)$$

Esta corresponde à primeira das equações de Maxwell e é conhecida como a lei de Gauss, na forma diferencial, em electrostática. Estabelece que se o divergente do campo eléctrico

é não nulo, então, devem existir campos eléctricos na região resultantes de uma carga total não nula.

A Lei de Gauss para a magnetostática é dada por:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (1.16)$$

Usando o Teorema de Gauss, à semelhança do caso anterior, temos a seguinte equação:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.17)$$

Esta é a segunda das equações de Maxwell, e é conhecida como Lei de Gauss, na forma diferencial, em magnetostática. Estabelece que os campos magnéticos são não divergentes e que não existem monopólos magnéticos livres.

1.2.3 - Campo Magnético, Lei de Biot-Savart e Densidade de Fluxo Magnético:

A fonte de um campo magnético estacionário pode ser um ímã permanente, um campo eléctrico que varia linearmente com o tempo, ou uma corrente contínua. No caso de um campo magnético produzido por um elemento, ou pela corrente total, que atravessa uma superfície fechada, este é dado por:

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} dL \quad (1.18)$$

onde \mathbf{I} é a corrente, $d\mathbf{L}$ é o vector do elemento e \mathbf{Ra}_R é o vector no ponto onde o campo é calculado.

Esta relação é conhecida como a Lei de Biot-Savart, que pode também ser expressa em termos de fontes distribuídas, como por exemplo, a densidade de corrente \mathbf{J} . Neste caso, temos:

$$H = \int_V \frac{J \times a_R}{4\pi R^2} \times dv \quad (1.19)$$

A densidade do Fluxo Magnético B no espaço livre é proporcional à intensidade do campo magnético criado por uma fonte nesse espaço. Então temos:

$$B = \mu_0 H \quad (1.20)$$

onde μ_0 é a permeabilidade do espaço livre.

1.2.4- Lei de Faraday

O Teorema de Stokes aplicado ao primeiro membro da equação (1.19) fica assim definida:

$$\oint_C H \cdot dL = \int_S (\nabla \times H) \cdot dS \quad (1.21)$$

Este Teorema relaciona a integral de caminho \oint_C com a integral da superfície delimitada por este caminho \int_S .

Fazendo o uso do Teorema de Stokes podemos derivar a Lei de Faraday na sua forma diferencial, supondo que os integrandos satisfazem as devidas condições de regularidade. Sabe-se que,

$$\oint_C E \cdot dL = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S B \cdot dS \quad (1.22)$$

e que,

$$\oint_C E \cdot dL = \int_S (\nabla \times E) \cdot dS \quad (1.23)$$

Comparando os dois membros das equações (1.22) e (1.23), temos que,

$$\int_S (\nabla \times E) \cdot dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B \cdot dS \quad (1.24)$$

Como esta integração é válida para qualquer superfície, então a integral será sempre nula quando o integrando for igual a zero. Neste caso temos:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.25)$$

Esta equação representa a Lei de Faraday na forma diferencial e é a formulação da terceira equação de Maxwell, que estabelece que os campos magnéticos variáveis no tempo geram campos eléctricos do tipo rotacionais.

2.2.5- Lei de Ampere - Maxwell

A lei de Ampere na sua forma integral é dada por:

$$\oint B \cdot dL = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S E \cdot dS + \mu_0 \int J \cdot dS \quad (1.26)$$

O Teorema de Stokes fornece uma relação entre a integral de circulação e a integral de superfície. Neste caso em magnetostática temos:

$$\oint B \cdot dL = \int \nabla \times B \cdot dS \quad (1.27)$$

Igualando os dois lados direitos das equações (1.26) e (1.27) temos que,

$$\int (\nabla \times B - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E - \mu_0 J) \cdot dS = 0 \quad (1.28)$$

Para que esta igualdade seja verdadeira, em qualquer superfície, é necessário que o seu integrando seja nulo. Neste caso temos:

$$\nabla \times B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E + \mu_0 J \quad (1.29)$$

ou

$$\nabla \times H = \frac{\partial}{\partial t} D + J \quad (1.30)$$

Esta é a quarta equação de Maxwell que descreve a Lei de Ampere, na sua forma diferencial.

Com esta especificação das leis básicas do electromagnetismo, temos o conjunto das equações de Maxwell, que vamos apresentar, de seguida, resumida.

1.2.6- Sumário das Equações de Maxwell

As leis básicas da electricidade e do magnetismo podem agora ser resumidas nas quatro equações seguintes, escritas na forma diferencial:

Dadas as quantidades vectoriais, ou seja, o fluxo D , o campo magnético H , o campo eléctrico E , a densidade do fluxo magnético B e a densidade de corrente J , temos:

- Lei de Coulomb:

$$\nabla \cdot D = \rho$$

- Lei de Ampere-Maxwell:

$$\nabla \times H = \frac{\partial}{\partial t} D + J$$

- Lei de Faraday:

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

- Lei de Gauss do Magnetismo - ausência de pólos magnéticos livres:

$$\nabla \cdot B = 0$$

Além destas equações, os fenómenos electromagnéticos devem obedecer a mais duas equações:

- Equação da força de Lorentz:

$$F = Q(E + \frac{v}{c} \times B),$$

que representa a força exercida sobre uma partícula por um campo eléctrico e por um campo magnético, sendo Q a carga, v a velocidade da partícula e c a constante que representa a velocidade da luz no vácuo.

- Equação da continuidade dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Nesta equação o vector densidade de corrente eléctrica \mathbf{J} , que representa a distribuição contínua de corrente eléctrica, é caracterizado pelo seu fluxo, através de uma superfície, ser igual à carga eléctrica que, na unidade de tempo, atravessa essa superfície. Por outro lado, a equação de continuidade traduz o princípio da conservação da carga numa dada região do espaço.

Podemos, também, especificar as equações de ondas tanto para o campo eléctrico como também para o campo magnético dadas pelas seguintes expressões:

- Equação de onda para o campo eléctrico:

$$\nabla^2 E - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

- Equação de onda para o campo magnético:

$$\nabla^2 H - \epsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

onde os parâmetros ϵ , μ e σ representam, respectivamente, a permissividade, permeabilidade e condutividade do meio.

Um aspecto fundamental das equações de Maxwell para o campo electromagnético é a existência de soluções sob a forma de ondas que se deslocam, e que transportam energia, de um ponto para outro. Estas equações governam o campo electromagnético em um meio linear, homogéneo, no qual a densidade de carga é zero, seja este meio condutor ou não.

Em regime estacionário, isto é, em que não há variação no tempo das grandezas que criam o campo, ou no regime quase estacionário, em que a frequência de variação no tempo das grandezas que criam o campo é de tal modo baixa, que a variação da densidade volumétrica de carga no tempo é desprezível face à divergência do vector densidade da corrente eléctrica de condução, as equações de Maxwell, referentes ao campo magnético, e a equação da continuidade, ficam assim definidas:

$$\nabla \times H = J$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \cdot J = 0$$

Estas equações estabelecem que os vectores indução magnética e densidade de corrente eléctrica, para o regime estacionário ou quase-estacionário, são solenoidais.

1.3- Funções Potenciais como funções auxiliares do cálculo numérico

A análise dos campos magnéticos e eléctricos apresenta o problema de resolver um sistema de equações diferenciais. Uma simplificação pode ser feita por intermédio de funções auxiliares, chamadas funções potenciais. Desta maneira, mudamos o sistema inicial para uma equação diferencial, escalar de segunda ordem.

1.3.1- Função potencial magnético

Para o campo magnético, atendendo a equação,

$$\nabla \cdot B = 0$$

e, considerando que a divergência do rotacional de um vector é nula, pode-se considerar o vector indução magnética **B** como o rotacional de um campo vectorial auxiliar **A**:

$$B = \nabla \times A$$

Mas, tendo em conta o corolário do Teorema de Helmholtz da unicidade de um campo vectorial em função das suas fontes, é necessário definir a divergência do vector \mathbf{A} para que este vector fique univocamente definido.

Para isso, deve-se considerar a equação de ligação dos potenciais em electromagnetismo, a chamada equação de ligação de Lorentz, dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

em que Φ é o potencial eléctrico (uma grandeza escalar), que verifica

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

No regime estacionário, esta equação transforma-se na equação de ligação de Coulomb dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Como o campo vectorial magnético \mathbf{H} é irrotacional, pode ser expresso sob a forma do simétrico do gradiente de um campo escalar

$$\mathbf{H} = -\nabla U$$

sendo U é o potencial escalar campo magnético, continuando a verificar a equação $\nabla \times \mathbf{H} = 0$.

1.3.2- Função potencial eléctrico

Como já foi dito na secção anterior, o campo vectorial eléctrico \mathbf{E} pode ser expresso via gradiente de uma função escalar Φ , ou seja,

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

sendo Φ é chamado o potencial escalar do campo eléctrico. Gostaríamos de salientar que a existência de tal função no caso geral não é garantida, porque a divergência de E não é necessariamente nula, mas em certos casos, como por exemplo, no caso electrostático, podemos garantir a existência, dado que:

$$\nabla \cdot E = 0$$

CAPITULO 2: FORMULAÇÃO VARIACIONAL DE PROBLEMAS ELECTROMAGNÉTICOS

Para simplificar o nosso trabalho vamos utilizar as equações de Maxwell deduzidas no capítulo 1,

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (2.1)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.4)$$

juntamente com as equações do material:

$$D = \epsilon E \quad (2.5)$$

$$B = \mu H \quad (2.6)$$

$$J = \sigma E \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

onde os parâmetros ϵ , μ e σ representam, respectivamente, a permissividade, permeabilidade e condutividade do meio.

2.1 –Método dos Elementos Finitos

Neste capítulo analisaremos os modelos permanentes, ou seja, quando as quantidades presentes no campo electromagnético não variam com o tempo. São aqui considerados problemas de campo potencial eléctrico (electrostática) e um outro do campo potencial magnético (magnetostática).

2.1.1- Electrostática

Um problema electrostático é caracterizado através do sistema de equações de Maxwell,

$$\nabla \times E = 0 \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (2.10)$$

combinado com a relação constitutiva entre as quantidades do campo electrostático expressa por:

$$D = \epsilon E \quad (2.11)$$

Atendendo que o campo potencial eléctrico Φ é uma grandeza escalar, podemos expressar a intensidade do campo eléctrico E actuante no modelo e de divergência nula, através do seu gradiente,

$$E = -\nabla \Phi \quad (2.12)$$

Combinando as equações (2.10), (2.11) e (2.12), obtém-se a seguinte relação:

$$-\nabla \cdot \epsilon \nabla \Phi = \rho \quad (2.13)$$

Esta é a equação diferencial que governa os problemas electrostáticos e que necessita agora de ser associada às condições dos contornos espaciais do modelo. Em problemas

electrostáticos tal é feito usualmente usando as condições de Dirichlet e de Neumann, no domínio da simulação: $\partial \Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

Definindo as condições de contorno do modelo em análise, temos:

$$\Phi = \Phi_D \text{ em } \Gamma_D, \text{ Condição de Dirichlet} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} = \Phi_N \text{ em } \Gamma_N, \text{ Condição de Neumann} \quad (2.15)$$

sendo \vec{n} o vector unitário normal ao contorno Γ_N .

Com a equação (2.13) e as condições do contorno, obtém-se o potencial escalar eléctrico Φ que permite calcular a intensidade do campo eléctrico \mathbf{E} através da equação (2.12).

2.1.2-Formulação fraca pelo Método dos Elementos Finitos:

Considerando as relações descritas acima que traduzem a função escalar potencial eléctrico e as respectivas condições de contorno,

$$-\nabla \cdot \epsilon \nabla \Phi = \rho \text{ em } \Omega \quad (2.16)$$

$$\Phi = \Phi_D \text{ em } \Gamma_D, \text{ Condição de Dirichlet} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} = \Phi_N \text{ em } \Gamma_N, \text{ Condição de Neumann} \quad (2.18)$$

onde Ω é um domínio suficientemente suave em \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, com a fronteira $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, \vec{n} o vector unitário normal ao contorno $\in \Gamma_N$ e ϵ é a permissividade eléctrica do domínio Ω .

Para o desenvolvimento seguinte vamos precisar o espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$. Este espaço consiste no conjunto de todas as funções de quadrado integrável, cujas derivadas generalizadas satisfazem

$$\int_{\Omega} |\partial_{x_i} f(x)|^2 d\Omega < \infty, i=1,2,\dots,n$$

Neste espaço a norma está definida como:

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 d\Omega + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_{x_i} f(x)|^2 d\Omega$$

com $n=2$ ou 3 .

Introduza-se o espaço funcional V_D , sobre o domínio Ω ,

$$V_D(\Omega) = \{\Phi \in H^1(\Omega) \mid \Phi = \Phi_D \in \Gamma_D\} \quad (2.19)$$

e o segundo espaço,

$$V_0(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = 0 \in \Gamma_D\} \quad (2.20)$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados (formulação fraca) à equação (2.16), multiplicando esta equação pela função de teste $\psi \in V_0(\Omega)$ e introduzindo a integração parcial nos dois membros desta equação, chega-se à formulação concreta do problema.

Ou seja, queremos encontrar $\Phi \in V_D$ tal que para todo $\psi \in V_0$ se tem

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \Phi d\Omega = \int_{\Omega} \psi \rho d\Omega - \int_{\Gamma_N} \psi \Phi_N dS \quad (2.21)$$

Esta é a formulação variacional do problema e é a equação integral base para a análise por intermédio do método dos elementos finitos, onde Ω e Γ_N descrevem o domínio e o contorno natural do modelo em análise, respectivamente, e ψ representa a função de teste, ou de peso, usada e que neste caso concreto são funções de interpolação de Galerkin, usadas para aproximar as variáveis de campo existentes ao longo dos elementos finitos.

Para mostrar a existência da unicidade da solução precisa-se dos seguintes lemas: (cf. [1]):

1. Lema de Lax-Milgram:

Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear coerciva e limitada, isto é, existem constantes C_1 e C_2 positivos, tal que para toda a função u, v em $H^1(\Omega)$

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

$$|a(u, u)| \geq C_2 \|u\|_{H^1}^2$$

então, o sistema $a(u, v) = \langle f, v \rangle$, para todo o v , tem uma solução única.

2. Lema: (Desigualdade de Friedrichs)

Seja Ω um domínio em \mathbb{R}^n com diâmetro d não nulo. Supomos que $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pertence ao espaço $H^1(\Omega)$ com valores zero na fronteira, então,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 d\Omega \leq d^2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_{x_i} u(x)|^2 d\Omega.$$

Estes dois lemas permitem-nos demonstrar o seguinte teorema sobre a existência e unicidade:

Teorema de existência e unicidade da solução: A equação (2.21) tem uma solução única Φ , se Φ tem valores zero na fronteira.

Prova: É fácil de ver que a nossa forma bilinear $\int_{\Omega} \epsilon \cdot \nabla \psi \cdot \nabla \Phi d\Omega$ é limitada pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, e, usando a desigualdade de Friedrichs, é coerciva, i.e.

$$\int_{\Omega} \epsilon \cdot \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi d\Omega \geq C \int_{\Omega} \Phi \cdot \Phi d\Omega.$$

Chamamos atenção que ϵ é não negativo.

Usando o Lema de Lax-Milgram obtemos a nossa afirmação.

Gostaríamos de salientar que, no caso de ter condições de Neumann, o teorema também é valido e a prova se adapta facilmente. Só precisamos de adicionar o termo sobre a fronteira.

Com auxílio do método dos elementos finitos chegaremos a uma aproximação do potencial escalar eléctrico Φ , bem como da função de teste ψ , como indicado abaixo:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i C_i \quad (2.22)$$

$$\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i N_i \quad (2.23)$$

onde i representa o número de nós do elemento finito na triangulação do domínio

$\Omega = \cup \Omega_i$, e N_i representa uma função de interpolação espacial correspondente ao nó i .

Utilizando as aproximações numéricas (2.22) e (2.23), a equação (2.21) pode ser trabalhada e reescrita na forma matricial, conforme se segue:

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{F} \quad (2.24)$$

onde Φ representa agora o vector que contem os valores nodais Φ_i do campo incógnita, \mathbf{F} é o vector de forças nodais actuates f_i e \mathbf{K} é a matriz de rigidez.

As expressões para os vectores Φ e \mathbf{F} , bem como para a matriz \mathbf{K} , são dadas por:

$$\Phi = [\Phi_i] \quad (2.25)$$

$$\mathbf{F} = \bigwedge_{i=1}^{n_{elem.}} f_i ; f_i = [f_p^i]; [f_p^i] = \int_{\Omega} N_p \rho d\Omega_i + \int_{\Gamma_{Ni}} N_p \Phi_N ds_i \quad (2.26)$$

$$\mathbf{K} = \bigwedge_{i=1}^{n_{elem.}} k^i ; k^i = [k_{pq}]; [k_{pq}] = \int_{\Omega_i} \epsilon (\nabla N_q)^T \nabla N_p d\Omega_i \quad (2.27)$$

onde \mathbf{N} é a matriz de interpolação, formada pelas funções de interpolação especificadas.

2.1.3- Problema de Dirichlet e Formulação como problema de ponto de sela:

Como vimos anteriormente, as condições de Neumann e as condições de Dirichlet com valores de fronteira zero encaixam-se perfeitamente na formulação variacional acima. Mas, no caso do problema de Dirichlet geral temos a dificuldade real da construção das funções N_i que satisfaçam as condições de fronteiras prescritas. Para evitar este problema podemos reformular o nosso caso como problema de ponto de sela.

Neste caso o problema toma a seguinte forma:

Denotando o espaço dos valores de fronteira de funções pertencendo a $H^1(\Omega)$ como $V(\partial\Omega)$, temos o problema:

Procuramos $(\Phi, \beta) \in H^1(\Omega) \times V(\partial\Omega)$, tal que, para todo $(\psi, \mu) \in H^1(\Omega) \times V(\partial\Omega)$ se tem

$$\int_{\Omega} \epsilon \cdot \nabla \psi \cdot \nabla \Phi \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \psi \beta \, dS = \int_{\Omega} \psi \rho \, d\Omega ,$$

e

$$\int_{\Gamma_N} \mu \Phi \, dS = \int_{\Gamma_N} \mu \Phi_D \, dS$$

Este problema tem uma solução única porque a condição adicional implica $\Phi = 0$, na fronteira, se $\Phi_D = 0$. Com $\beta = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ obtemos a formulação anterior.

Esta situação corresponde ao seguinte problema (para mais detalhes ver [1]).

Procuramos $(\Phi, \beta) \in H^1(\Omega) \times V(\partial\Omega)$, tal que, para todo $(\psi, \mu) \in H^1(\Omega) \times V(\partial\Omega)$ se tem

$$\int_{\Gamma} \phi(x) \, dS \int_{\Gamma} \psi(x) \, dS + \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\Omega - \int_{\Gamma} \psi(x) \beta(x) \, dS = \int_{\Omega} f(x) \psi(x) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_D(x) \, dS \int_{\Gamma} \psi(x) \, dS$$

$$\int_{\Gamma} \beta(x) dS \int_{\Gamma} \mu(x) dS + \int_{\Gamma} \phi(x) \mu(x) dS = \int_{\Omega} \phi_D(x) \mu(x) d\Omega - \int_{\Omega} f(x) d\Omega \int_{\Gamma} \mu(x) dS .$$

Discretizando como no caso anterior chegamos ao problema discreto:

$$\begin{pmatrix} \underline{a} \underline{a}^T + A_h & -B_h^T \\ B_h & \underline{b} \underline{b}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f} \\ \underline{g} \end{pmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} A_h[j, i] &:= \int_{\Omega} \nabla \phi_i(x) \cdot \nabla \phi_j(x) d\Omega \\ B_h[l, i] &:= \int_{\Gamma} \psi_l(x) \phi_i(x) dS \\ a_i &:= \int_{\Gamma} \phi_i(x) dS \\ b_l &:= \int_{\Gamma} \psi_l(x) dS \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_j &:= \int_{\Gamma} \phi_D(x) dS \int_{\Gamma} \phi_j(x) dS + \int_{\Omega} f(x) \phi_j(x) d\Omega \\ g_j &:= - \int_{\Omega} f(x) d\Omega \int_{\Gamma} \psi_l(x) dS + \int_{\Gamma} \phi_D(x) \psi_l(x) dS . \end{aligned}$$

2.2- Magnetostática

Um problema magnético em regime permanente é caracterizado e definido através do sistema de equações de Maxwell,

$$\nabla \times H = J \tag{2.28}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{2.29}$$

que combinadas com a relação constitutiva entre as quantidades do campo magnético expressa por:

$$B = \mu_0 H \quad (2.30)$$

e a equação de continuidade num campo em regime permanente dada por:

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (2.31)$$

resulta numa equação diferencial de segunda ordem mais apropriada para a modelação e simulação numérica computacional.

Atendendo que o campo potencial magnético é uma grandeza vectorial, cujo rotacional fornece o campo magnético actuante no modelo, podemos expressar a intensidade do campo magnético H através do rotacional de uma função escalar U ,

$$H = -\nabla \times U \quad (2.32)$$

Combinando as equações (2.28), (2.29) e (2.32), obtém-se a seguinte relação:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times U = J \quad (2.33)$$

onde U é uma grandeza escalar representando, de forma genérica, uma componente de intensidade do campo magnético.

Esta é uma equação diferencial que governa os problemas magnetostáticos e que necessita de ser associada às condições de contorno espaciais do modelo e às condições de interface entre os diferentes materiais que constituem o domínio do problema.

Com a equação (2.33) e com as condições do contorno e de interface, obtém-se o potencial escalar magnético U , o qual permite calcular a intensidade do campo magnético H através da equação (2.32).

2.2.1- Formulação para materiais com interface:

Considerando a equação (2.32) que traduz uma função potencial expressa por um potencial magnético vectorial \mathbf{U} , num domínio Ω que consiste em diferentes materiais dividido em duas regiões, $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$

$$\mathbf{U}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{U} \right) = \mathbf{J}, \text{ em } \Omega \quad (2.34)$$

Definindo as condições de contorno em $\Gamma = \Gamma_B \cup \Gamma_H$,

$$\mathbf{U} \times \mathbf{n} = \mathbf{U}_t \text{ em } \Gamma_B, \text{ Condição de Dirichlet} \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{\mu_i} (\nabla \times \mathbf{U}) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_t \text{ em } \Gamma_H, \text{ Condição de Neumann} \quad (2.36)$$

e as condições ao longo da interface Σ entre as duas regiões,

$$\mathbf{U}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{U}_2 \times \mathbf{n}, \text{ em } \Sigma \quad (3.37)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{U}_1 = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{U}_2 \text{ em } \Sigma \quad (3.38)$$

onde Γ_B é o contorno que contém a componente tangencial do potencial magnético \mathbf{U}_t , ou seja, o contorno associado à condição de Dirichlet e Γ_H é o contorno que contém a componente tangencial da intensidade do campo magnético \mathbf{H}_t , ou seja associado à condição de Neumann.

Aqui, precisamos de usar o seguinte espaço:

$$H_0^{\mathcal{E}}(curl) = \left\{ u \in (L^2(\Omega))^3 \mid \nabla \times u \in (L^2(\Omega))^3, u \times n|_{\Gamma} = 0, [n \times u]|_{\Sigma} = 0 \right\},$$

Chamando a atenção de que $L^2(\Omega)$ designa, como sempre, o espaço das funções quadraticamente integrável.

Multiplicando a equação (2.33) por uma apropriada função de teste $\bar{\psi} \in H_0^{\mathcal{E}}(curl)$ e introduzindo as condições de contornos e de interface, pela aplicação do Teorema de Green na forma vectorial, chega-se à formulação concreta do problema.

Ou seja, queremos $U \in H_0^{\mathcal{E}}(curl)$, tal que, para todo $\bar{\psi} \in H_0^{\mathcal{E}}(curl)$ se tem,

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \bar{\psi}) \cdot \left(\frac{1}{\mu} \times U \right) d\Omega - \int_{\Gamma_H} \left(\bar{\psi} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times U \right) \cdot n \, d\Gamma = \int_{\Omega} \bar{\psi} \cdot J d\Omega \quad (2.39)$$

sujeito a,

$$\int_{\Gamma_H} \left(\bar{\psi} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times U \right) \cdot n \, d\Gamma = \int_{\Gamma_H} \bar{\psi} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times U \times n \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_H} \bar{\psi} \cdot H_t \, d\Gamma \quad (2.40)$$

Esta é a formulação variacional do problema e é a equação integral base para análise por intermédio do método dos elementos finitos, onde Ω e Γ descrevem o domínio e o contorno natural do modelo em análise, respectivamente, Σ é a interface entre as duas regiões e $\bar{\psi}$ representa a função de teste, ou de peso, que neste caso concreto é representada por funções de interpolação de Galerkin, usadas para aproximar as variáveis de campo existentes ao longo dos elementos finitos.

Com auxílio do método dos elementos finitos chegaremos a uma aproximação do potencial magnético vectorial \mathbf{U} , bem como da função de teste $\bar{\psi}$,

$$\mathbf{U} \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i E_i \quad (2.41)$$

$$\bar{\psi} = \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i E_i \quad (2.42)$$

onde n representa o número de nós do elemento finito na triangulação do domínio Ω
 $= \cup \Omega_i$, e E_i representa vector função de interpolação espacial correspondente ao nó i .

tomando em consideração as características e os dados impostos ao modelo anterior que estão indicados na tabela abaixo:

Tabela:

		Tipo de Material	Permissividade Relativa, (ϵ)	Densidade de Carga Eléctrica, (ρ)
Subdomínios	R1		-1300	0
	R2		-85	0
	C01		2,1	0
Potencial Eléctrico, (V)				
Contornos	V01	10		
	V04	10		
	V05	-10		
	V07	10		

Efectuando a simulação computacional, temos a grelha uniforme apresentada na fig.1b, abaixo, constituída por 290 elementos.

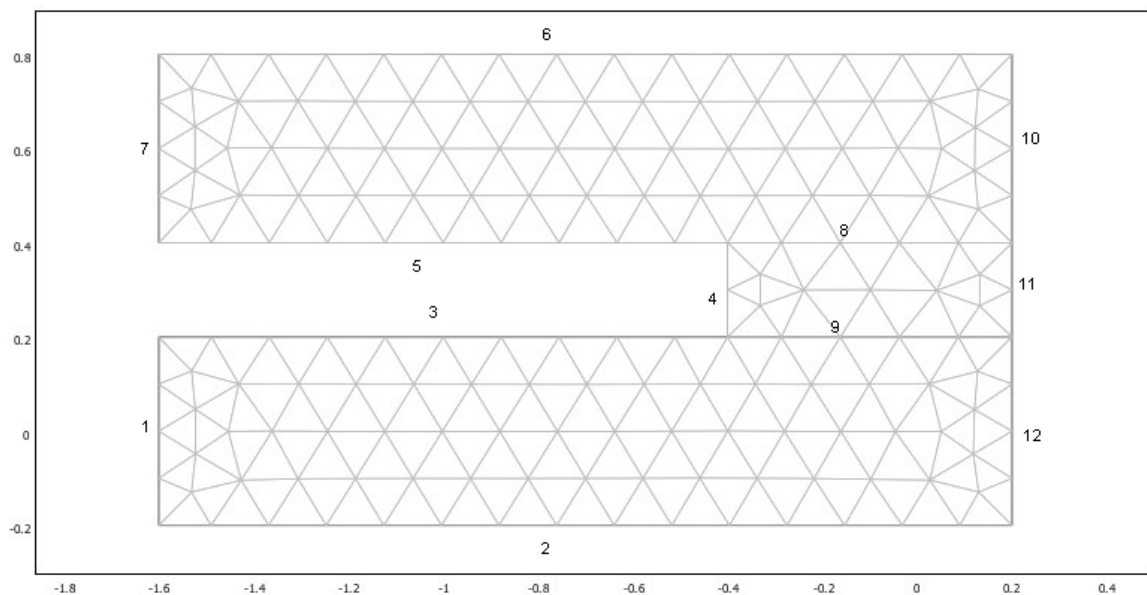


Fig.1b: Grelha uniforme

Tendo em conta eventuais problemas de interferências nos cantos interiores, apresentamos também, para este caso, uma grelha com o refinamento localizado nos cantos do recorte do modelo como indica a fig.1c, seguinte, a partir da qual tiramos a solução. O refinamento contém 1527 nós e 720 elementos finitos do tipo Lagrange - linear.

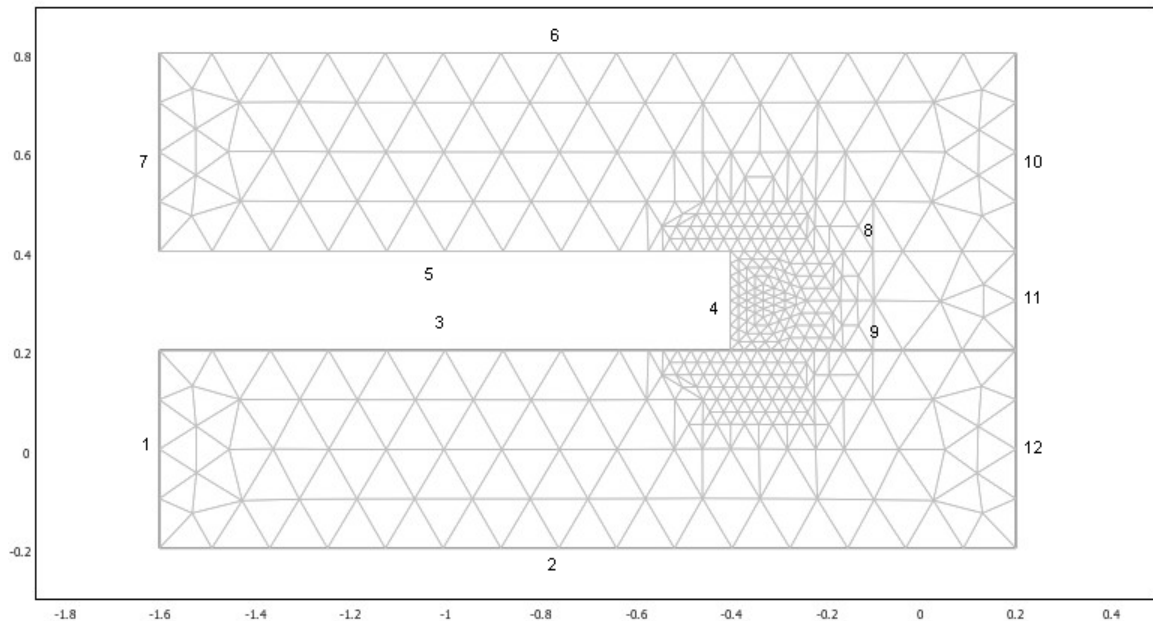


Fig.1c: Grelha com refinamento localizado nos cantos e interface dos subdomínios.

Para a resolução do sistema linear construído usa-se o método de UMFPACK com uma tolerância de 10^{-6} e um máximo de 25 iterações.

A solução do sistema, ou seja, o campo potencial eléctrico calculado, bem como seu gradiente, é apresentado na fig.1d, abaixo.

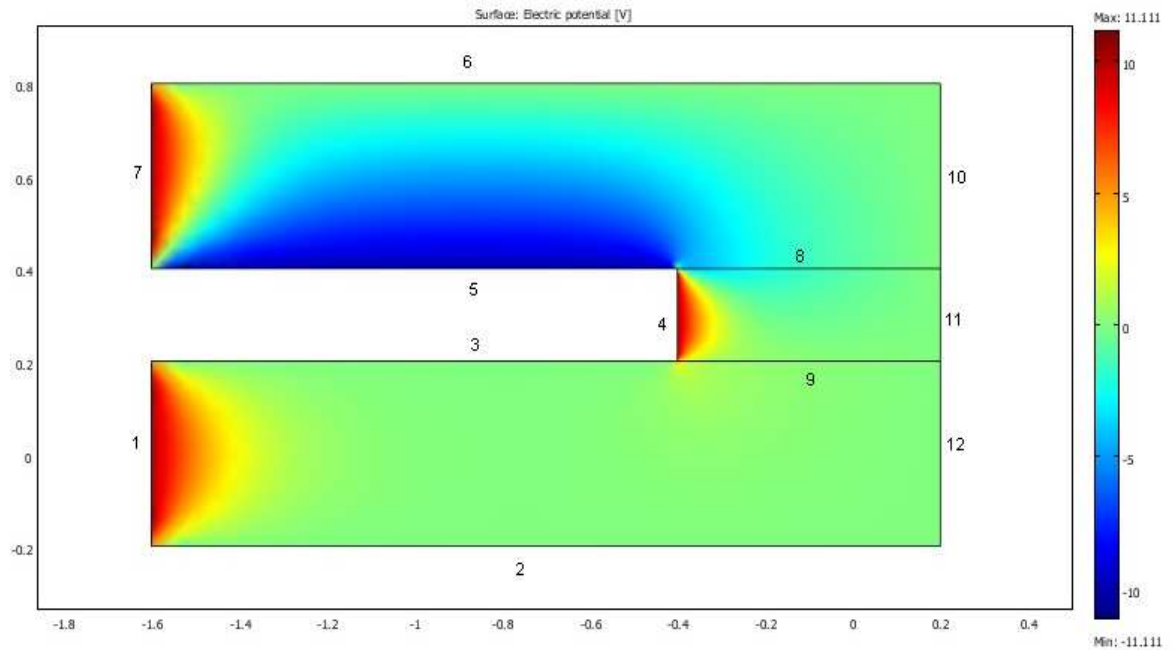


Fig.1d: Solução do sistema – Campo Potencial Eléctrico e seu Gradiente

Verificamos que, na ausência de densidade de carga eléctrica nos subdomínios, o potencial eléctrico, e o seu gradiente, ficaram dependentes apenas das condições de fronteira, pelo que podemos notar na figura anterior a manifestação do campo potencial eléctrico com mais intensidade na região próxima das fronteiras com potencial inicial diferente de zero. Mas, também, verificamos a existência de uma região de potencial negativo nas proximidades da fronteira onde o potencial inicial foi negativo. O que está de acordo com os resultados teóricos.

3.1.2- Modelo tridimensional:

Considere a **fig.2a**, apresentada abaixo:

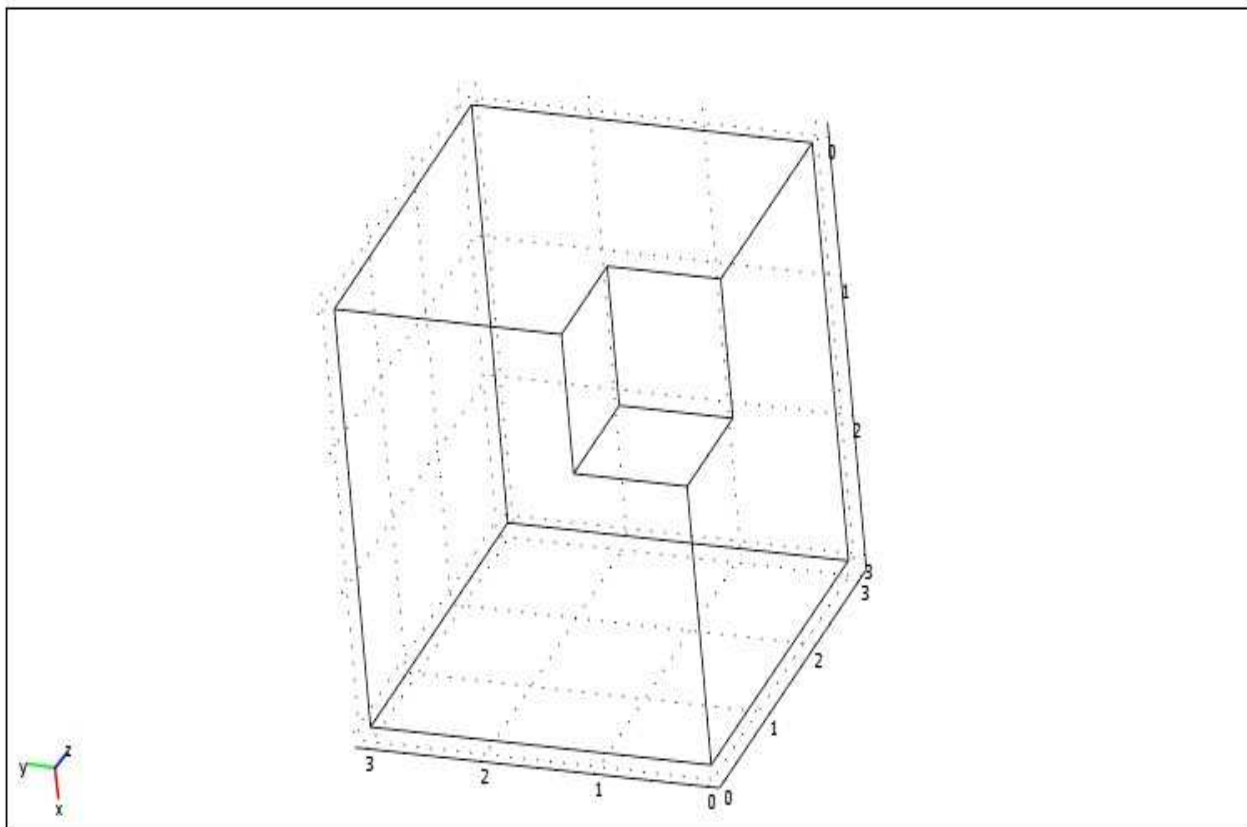


Fig.1a: Exemplo de um modelo tridimensional com recorte.

Os dados do domínio, bem como as condições de fronteira do modelo acima estão indicados na tabela seguinte.

Tabela

		Tipo de Material	Permissividade Relativa, (ϵ)	Densidade de Carga Eléctrica, (ρ)
Domínio	1		85	0
Potencial Eléctrico, (V)				
Contornos	V02		2	
	V04		2	
	V07		2	

A partir desses dados, e com um refinamento total do modelo, obtemos a grelha da **fig.2b** indicado abaixo, com 84566 nós e 58876 elementos finitos do tipo Lagrange – linear.

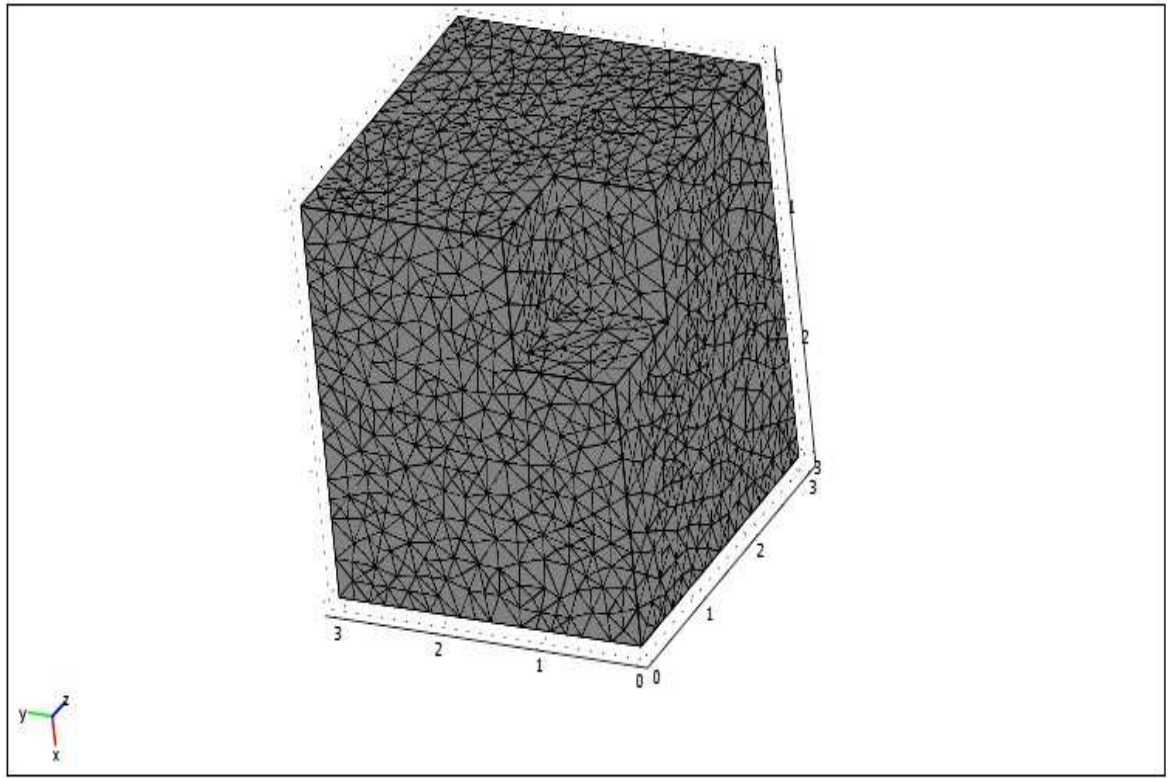


Fig.2b: Grelha dos nós e dos elementos finitos com refinamento total.

A solução do sistema, ou seja, o campo escalar do potencial eléctrico calculado, bem como seu gradiente, é apresentado na fig.2c, seguinte, onde foi utilizado o método de UMFPACK, com uma tolerância de 10^{-6} e um máximo de 25 iterações.

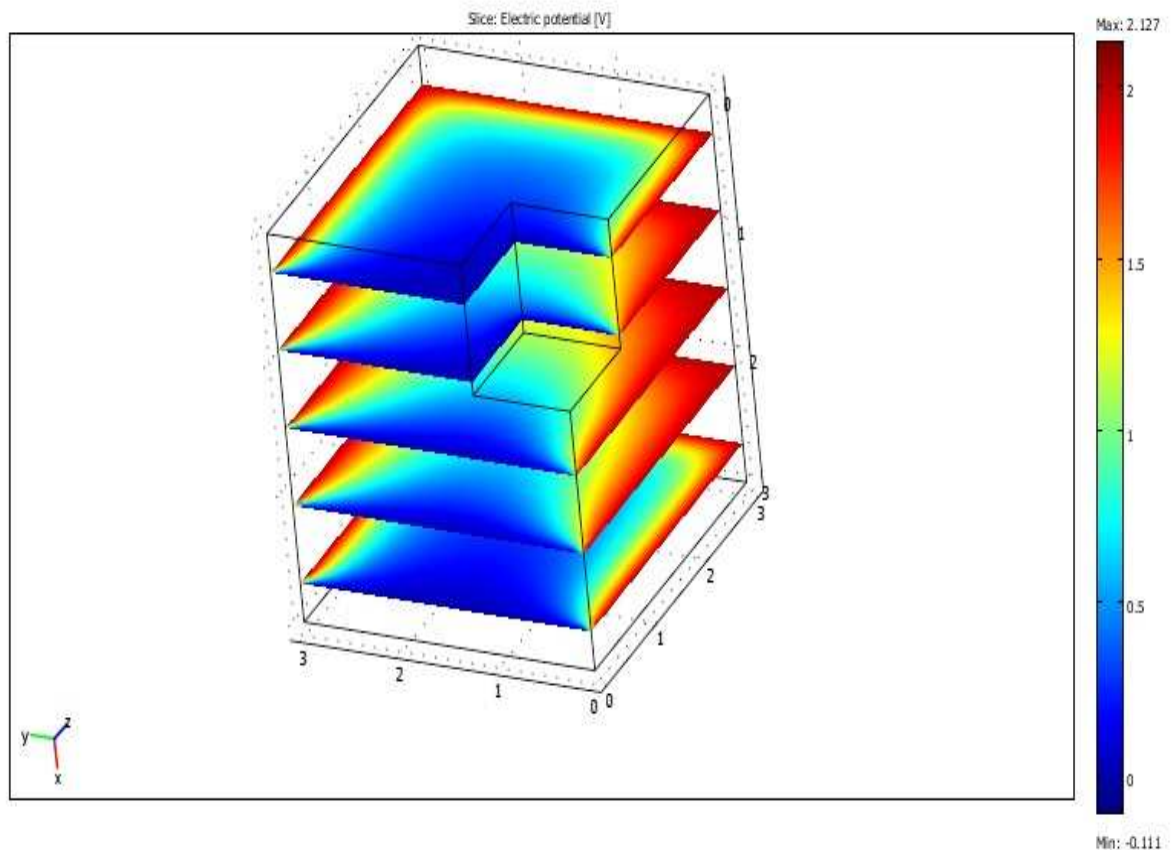


Fig.2c: Solução do sistema – Campo Potencial Eléctrico e seu Gradiente em 3D

A solução apresentada em formato recortado permite-nos observar o comportamento do campo potencial eléctrico na região interna do modelo e podemos concluir que, na ausência de condutividade eléctrica, esta manifestação depende do potencial eléctrico nos contornos. Ou seja, o campo potencial eléctrico manifestou-se, no modelo, de acordo com os valores do potencial eléctrico impostos nas fronteiras, como indicam a tabela e a figura anterior.

3.2- Magnetostática

Neste caso analisa-se a componente do vector potencial magnético (e o seu rotacional, que descreve o campo magnético do modelo), de um modelo simples bidimensional.

3.2.1- Análise de um modelo bidimensional, em Magnetostática:

Considere o modelo representado na fig3a seguinte:

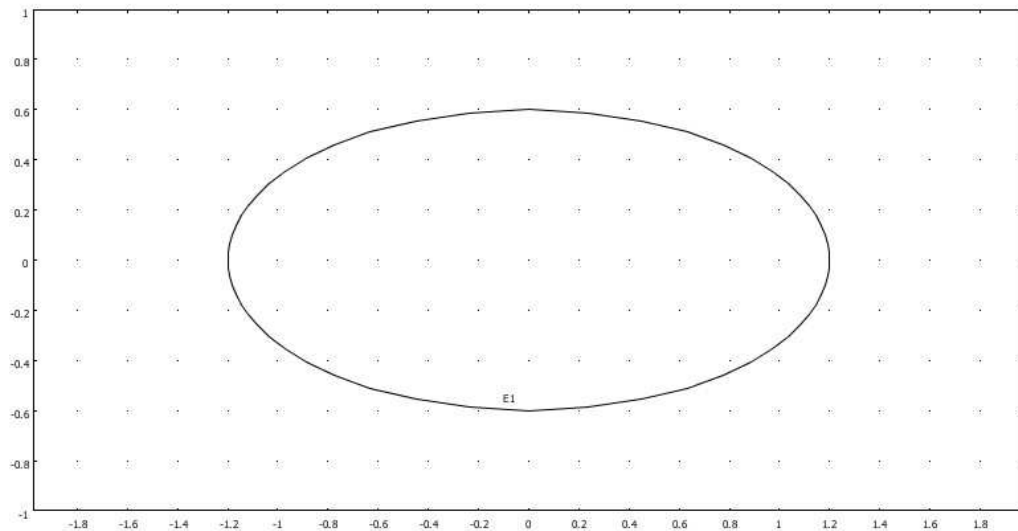


Fig.3a: Modelo bidimensional para análise em Magnetostática

As condições do subdomínio e dos contornos estão indicadas na tabela abaixo:

Tabela

		Tipo de Material	Densidade de Corrente Eléctrica, (J_z)	Permeabilidade Relativa, (μ_r)
Subdomínio	1		100 A/m^2	1000
Potencial Magnético Actuante dos Contornos(Web/m)				
Contornos	A01		40	
	A02		40	
	A03		40	
	A04		40	

A corrente que actua no sistema (representada por fontes no modelo matemático) é caracterizada pela sua densidade dada por $J = 100 \text{ A/m}^2$, a permeabilidade relativa do material, que neste caso concreto é dada por $\mu = 1000$, e o potencial magnético que actua nos contornos é dado por $A_0 = 40 \text{ web/m}$.

Com os dados da tabela, a grelha uniforme com **300 elementos finitos do tipo Lagrange – Linear e 641 nós** está representada na **fig.3b**, seguinte.

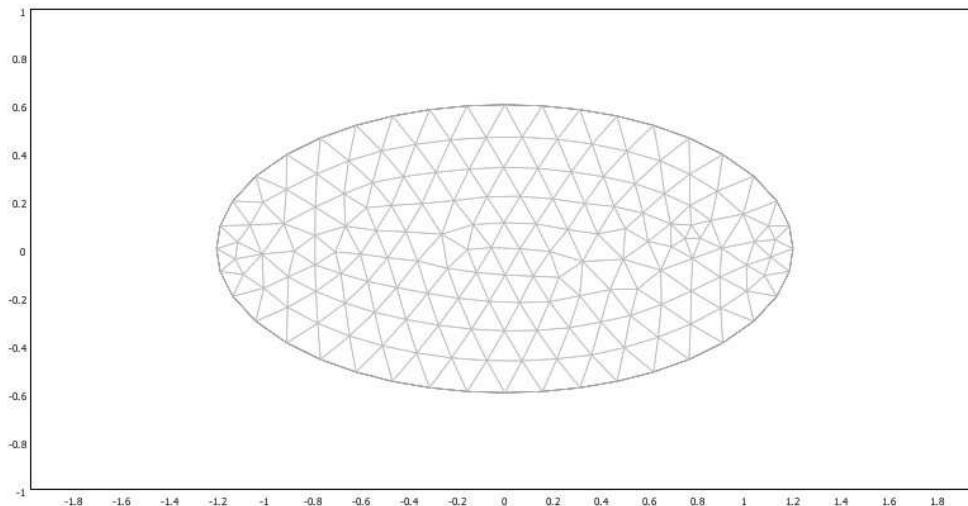


Fig. 3b: Grelha Uniforme com 300 elementos

O campo potencial magnético calculado é apresentado na Fig3c, abaixo.

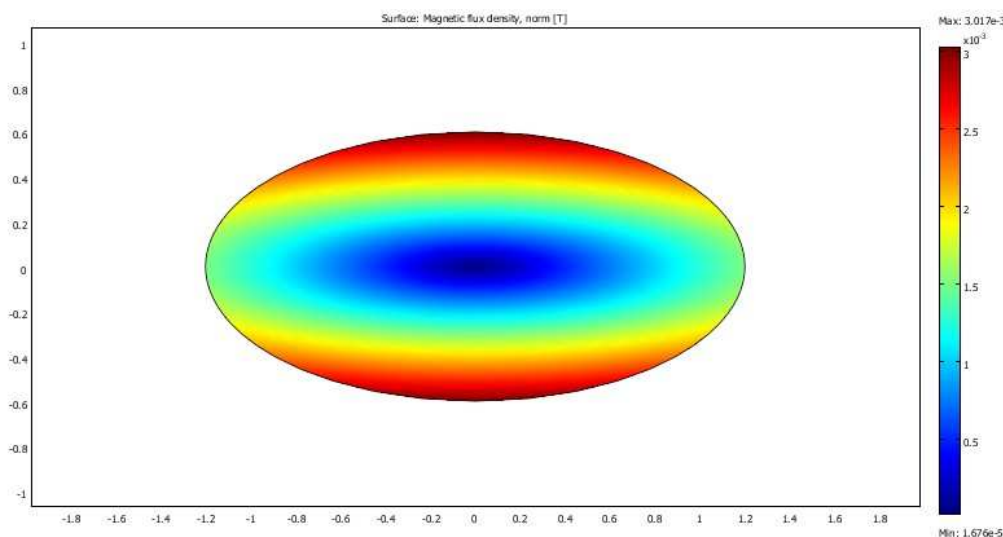


Fig.3c : Solução do problema – Densidade do Fluxo Magnético no modelo

A solução mostra-nos uma baixa concentração da densidade do fluxo magnético na região central do modelo.

Conclui-se, então que a densidade do fluxo magnético depende das condições iniciais do material do domínio, ou seja, da sua densidade de corrente eléctrica e da sua permeabilidade relativa e, também, depende do potencial magnético que actua nos contornos.

CONCLUSÃO:

O método dos elementos finitos, conforme se pôde observar, é uma ferramenta poderosa para análise de problemas complexos em electromagnetismo.

Recorrendo a este método de análise numérica pode-se trabalhar com modelos que atingem um número elevado de nós/elementos na triangulação, pode-se evidenciar o poder dos computadores de hoje em que há possibilidades de cálculos complexos sem recorrência aos centros de computação

No presente trabalho foram analisados problemas permanentes em electrostática e em magnetostática e os resultados encontrados estão em concordância com os previstos pela teoria. É importante ressaltar que os modelos aqui analisados são de alta complexidade (meios heterogêneos com geometria intrincada, etc.) impossibilitando a análise dos mesmos por intermédio de técnicas analíticas. Desta forma, destaca-se a importância de metodologias numéricas avançadas, como as aqui apresentadas, para a solução de problemas reais na engenharia moderna.

Com a modelação das ondas electromagnéticas e as simulações numéricas efectuadas concluímos, também, que esta técnica é válida para outras situações que se adaptam a mesma formulação matemática como por exemplo na modelação e simulação de ondas sísmicas e acústicas, nos cálculos de terremotos, na definição de modelos das estruturas mecânicas, incluindo modelos de peças para tornos, na dinâmica dos fluidos, etc.. Ou seja, praticamente todas as áreas das ciências exactas tem feito uso, cada vez mais intensivo, dos métodos e técnicas computacionais para resolução de problemas para os quais as soluções analíticas são impraticáveis e/ou imprecisas.

BIBLIOGRAFIA:

[1] O. Steinbach, Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems: Finite and Boundary Elements, Springer, 2007.

[2] E. Zhelezina, Método de elementos finitos adaptativos para a simulação numérica de campos eléctricos, magnéticos, e acústicos, Tese de Doutoramento, Universitaet Erlangen-Nuernberg, 2005 (em inglês).

[3] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, The Finite Element Method, Butterworth Heinmann, 2000.

[4] A. Bondeson, T. Rylander, P. Ingelstroem, Computational Electromagnetics, Springer, 2005.

[5] W. H. A. Schilders, E. J. W. ter Maten, Numerical Methods in Electromagnetics, Elsevier, 2005.

[6] H. William, Hayt Jr, Electromagnetismo, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. , Rio de Janeiro 1978.

[7] Mc Graw-Hill, Electromagnetics, Copyright, 1973.